37^{th} Indian National Mathematical Olympiad - 2023

Time: 4 hours **January 15, 2023**

Instructions:

- **Calculators (in any form) and protractors are not allowed.**
- **Rulers and compasses are allowed.**
- **All questions carry equal marks. Maximum marks: 102.**
- **No marks will be awarded for stating an answer without justification.**
- **Answer all the questions.**
- **Answer to each question should start on a new page. Clearly indicate the question number.**

1. Let S be a finite set of positive integers. Assume that there are precisely 2023 ordered pairs (x, y) in $S \times S$ so that the product xy is a perfect square. Prove that one can find at least four distinct elements in S so that none of their pairwise products is a perfect square.

   Note: As an example, if $S = \{1, 2, 4\}$, there are exactly five such ordered pairs: $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$, and $(4, 4)$.

2. Suppose $a_0, \ldots, a_{100}$ are positive reals. Consider the following polynomial for each k in $\{0, 1, \ldots, 100\}$:

   $$a_{100+k}x^{100} + 100a_{99+k}x^{99} + a_{98+k}x^{98} + a_{97+k}x^{97} + \cdots + a_{2+k}x^2 + a_{1+k}x + a_k,$$

   where indices are taken modulo 101, *i.e.*, $a_{100+i} = a_{i-1}$ for any i in $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Show that it is impossible that each of these 101 polynomials has all its roots real.

3. Let $\mathbb{N}$ denote the set of all positive integers. Find all real numbers c for which there exists a function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfying:

   (a) for any $x, a \in \mathbb{N}$, the quantity $\frac{f(x+a)-f(x)}{a}$ is an integer if and only if $a = 1$;

   (b) for all $x \in \mathbb{N}$, we have $|f(x) - cx| < 2023$.

4. Let $k \geq 1$ and $N > 1$ be two integers. On a circle are placed $2N + 1$ coins all showing heads. Calvin and Hobbes play the following game. Calvin starts and on his move can turn any coin from heads to tails. Hobbes on his move can turn at most one coin that is next to the coin that Calvin turned just now from tails to heads. Calvin wins if at any moment there are k coins showing tails after Hobbes has made his move. Determine all values of k for which Calvin wins the game.

5. Euler marks n different points in the Euclidean plane. For each pair of marked points, Gauss writes down the number $\lfloor \log_2 d \rfloor$ where d is the distance between the two points. Prove that Gauss writes down less than $2n$ distinct values.

   Note: For any $d > 0$, $\lfloor \log_2 d \rfloor$ is the unique integer k such that $2^k \leq d < 2^{k+1}$.

6. Euclid has a tool called *cyclos* which allows him to do the following:

   - Given three non-collinear marked points, draw the circle passing through them.
   - Given two marked points, draw the circle with them as endpoints of a diameter.
   - Mark any intersection points of two drawn circles or mark a new point on a drawn circle.

   Show that given two marked points, Euclid can draw a circle centered at one of them and passing through the other, using only the cyclos.

———00000———

37-वाँ भारतीय राष्ट्रीय गणित ओलंपियाड – 2023

समय: 4 घंटे **जनवरी 15, 2023**

निर्देश:

- **कैलकुलेटर (किसी भी स्वरुप मे) या चांदा लाने की अनुमति नहीं है।**
- **रुलर एवं प्रकार लाने की अनुमति है।**
- **सभी प्रश्न बराबर अंकों के हैं। अधिकतम अंक: 102 हैं।**
- **प्रश्न का हल लिखे बिना केवल जवाब लिखने पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।**
- **सभी प्रश्नों का जवाब दें।**
- **हर प्रश्न का उत्तर नये पृष्ठ से शुरू करें। प्रश्नों का उत्तर देने से पहले उत्तर-पुस्तिका पर लिखे निर्देश ध्यान से पढ़ें।**

1. मान लो कि S धन पूर्णांकों का एक परिमित समुच्चय है। मान लो कि समुच्चय $S \times S$ में ऐसे कुल 2023 क्रमित युग्म (x, y) हैं जिनके लिए गुणनफल xy एक पूर्ण वर्ग है। सिद्ध करो कि S में कम से कम चार ऐसे सदस्य हैं जिनमें से किन्ही भी दो सदस्यों का गुणनफल एक पूर्ण वर्ग नहीं है।
<u>नोट:</u> उदाहरण के तौर पर, अगर $S = \{1, 2, 4\}$ है तो ठीक पाँच ऐसे क्रमित युग्म होंगे: $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$ व $(4, 4)$।

2. मान लो कि $a_0, \ldots, a_{100}$ धन वास्तविक संख्याएँ हैं। समुच्चय $\{0, 1, ..., 100\}$ के किसी भी सदस्य k के लिए निम्न बहुपद लो:

$$a_{100+k}x^{100} + 100a_{99+k}x^{99} + a_{98+k}x^{98} + a_{97+k}x^{97} + \cdots + a_{2+k}x^2 + a_{1+k}x + a_k$$

जहाँ सूचकांकों को मापांक 101 से समशेष पढ़ेंगे, मतलब $\{1, 2, ..., 100\}$ में किसी भी i के लिए $a_{100+i} = a_{i-1}$ मान लो। सिद्ध करो कि यह असंभव है कि इन सभी 101 बहुपदों के सभी शून्यक वास्तविक संख्याएँ हों।

3. मान लो कि $\mathbb{N}$ सभी धन पूर्णांकों के समुच्चय को निरुपित करता है। ऐसी सभी वास्तविक संख्याएँ c ज्ञात करो जिनके लिए एक ऐसा फलन $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ मिलना संभव हो जिसके लिये:
   (a) किसी भी $x, a \in \mathbb{N}$ के लिए संख्या $\frac{f(x+a)-f(x)}{a}$ एक पूर्णांक तभी और सिर्फ़ तभी है जब $a = 1$ हो; व
   (b) सभी $x \in \mathbb{N}$ के लिए $|f(x) - cx| < 2023$ है।

4. मान लो कि $k \geq 1$ व $N > 1$ दो पूर्णांक हैं। एक गोले पर $2N + 1$ सिक्के चित्त रखते हैं। केल्विन (Calvin) और हॉब्स (Hobbes) निम्न खेल खेलते हैं: केल्विन (Calvin) शुरू करता है, और अपनी चाल पड़ने पर किसी भी सिक्के को चित्त से पट पलट सकता है। हॉब्स (Hobbes) अपनी चाल आने पर ज्यादा से ज्यादा एक सिक्के को, और वह भी ऐसे सिक्के को जो केल्विन (Calvin) के द्वारा पलटे गए सिक्के के बग़ल में है, को पट से चित्त कर सकता है। अगर कभी भी हॉब्स (Hobbes) की चाल के बाद k सिक्के पट हैं तो केल्विन (Hobbes) जीत जाता है। ऐसे सभी k ज्ञात करो जिनके लिए केल्विन (Calvin) ये खेल जीत जाएगा।

5. ऑयलर (Euler) एक यूक्लिडियन (Euclidean) समतल में n अलग-अलग बिंदु चिन्हित करता है। किन्हीं भी दो चिन्हित बिंदुओं के लिए गाउस (Gauss) संख्या $\lfloor \log_2 d \rfloor$ लिखता है जहाँ d इन दो बिंदुओं के बीच की दूरी है। सिद्ध करो कि गाउस (Gauss) अधिक से अधिक $2n$ अलग-अलग संख्याएँ लिखता है।
<u>नोट:</u> किसी भी $d > 0$ के लिए $\lfloor \log_2 d \rfloor$ ऐसा एकमात्र पूर्णांक k है, जिसके लिए $2^k \leq d < 2^{k+1}$ है।

6. यूक्लिड (Euclid) के पास <u>साइक्लॉस</u> (cyclos) नामक एक ऐसा औज़ार है जिससे निम्न निर्माण संभव हैं:
   - कोई भी तीन ग़ैर-समरैखिक चिन्हित बिंदु दिये जाने पर, उन तीनों बिंदुओं से गुजरने वाले वृत्त का निर्माण।
   - कोई भी दो चिन्हित बिंदु दिये जाने पर, उस वृत्त का निर्माण जिसके किसी एक व्यास के दोनों सिरे यह दो बिंदु हों।
   - कोई भी दो वृत्त दिये जाने पर उनके प्रतिच्छेदन पर स्थित किसी भी बिंदु को चिन्हित करना व किसी भी वृत्त पर कोई एक नई बिंदु चिन्हित करना।

   सिद्ध करो कि कोई भी दो चिन्हित बिंदु दिये जाने पर यूक्लिड (Euclid) केवल साइक्लॉस (Cyclos) का प्रयोग करके एक ऐसे वृत्त का निर्माण कर सकता है जिसका केंद्र एक बिंदु हो व दूसरी बिंदु वृत्त पर स्थित हो।

----------00000----------